الهندسة الفضائية

1) تذكير :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

❖ لتكن $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$

إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$

المسافة AB : $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$

إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

❖ لتكن $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$

منظم متجهة : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$

الجداء السلمي: $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

خاصية : $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$

❖ **تمثيل بارامتري لمستقيم:**

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و موجه بالمتجهة $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$

$$M\left(x,y,z\right)\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ و } \vec{u} \text{ مستقيميتان}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=t\vec{u}\quad (t\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_A+t\alpha \\ y=y_A+t\beta \\ z=z_A+t\gamma \end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$

النظمة الأخيرة تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

❖ **معادلة ديكارتية لمستوى:**

ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية للمستوى (P)

$$M\left(x,y,z\right)\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$$

$$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$

خاصية :

إذا كان (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ فإن $\vec{n}(a,b,c)$ هي متجهة منظمية للمستوى (P).

❖ مسافة نقطة عن مستوى :

ليكن (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ نقطة من الفضاء

$$d(\Omega,(P))=\frac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2) الفلكة

أ. تعريف :

لتكن Ω نقطة و r عددا حقيقيا موجبا قطعا
مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M=r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω و شعاعها r و نرمز لها بالرمز : $S(\Omega,r)$

ب. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركزها و شعاعها :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ و شعاعها r هي :
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

ج . معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و M نقطة من ألفضاء
$$M\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$$

د . دراسة E مجموعة النقط التي تحقق: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ تكافئ $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

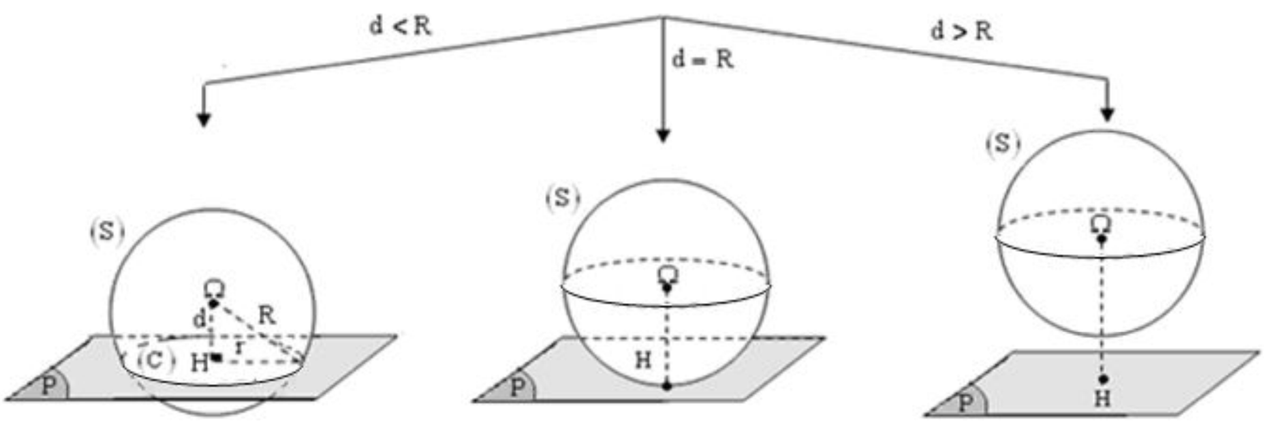
هناك ثلاث حالات :

- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}<0$: E مجموعة فارغة
- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}=0$: E هي النقطة الأحادية $\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)\right\}$
- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}>0$: E هي الفلكة التي مركزها $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$ وشعاعها $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

3) الأوضاع النسبية لفلكة و مستوى

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d=d(\Omega,(P))$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

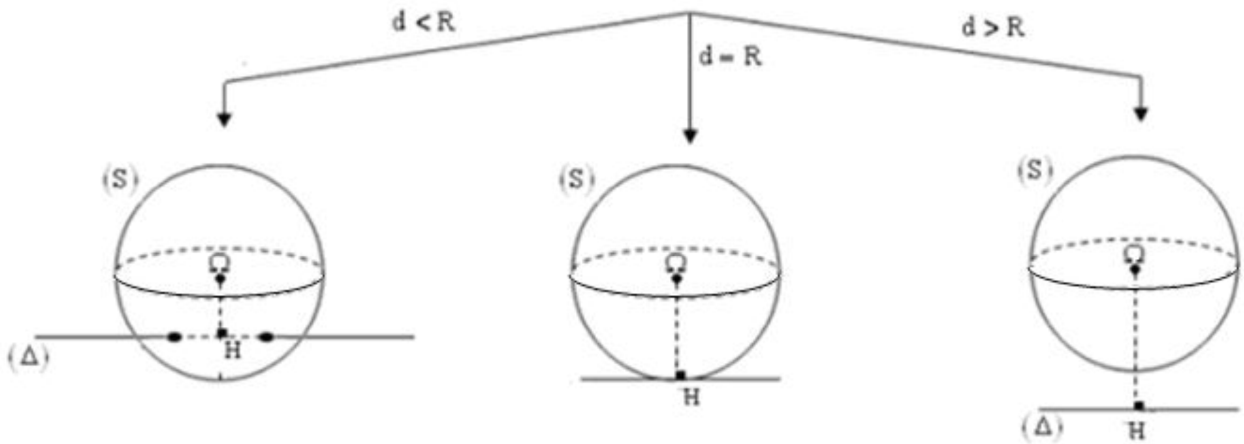


المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) مركزها H و شعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2}$		المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H		المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S)

4) الأوضاع النسبية لفلكة و مستقيم :

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d = d(\Omega,(\Delta))$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (Δ)



المستقيم (Δ) و الفلكة (S) لا يتقاطعان	المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة H	المستقيم (Δ) يخترق الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين

5) الجداء المتجهي :

أ. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي :

إذا كان $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

فإن $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\vec{k}$

ب. استقامية متجهتين :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ يكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

ج. استقامية ثلاث نقط :

A و B و C مستقيمية يكافئ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

د. معادلة ديكارتية لمستوى :

إذا كان $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمية وبالتالي فهي تحدد لنا مستوى (ABC)

و المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ هي متجهة منظمية للمستوى (ABC)

و لدينا : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$

و منه نستنتج معادلة المستوى (ABC)

ملاحظة : كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجها بالمتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

ه. مساحة مثلث - مساحة متوازي أضلاع:

مساحة مثلث ABC هي : $S_{ABC} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{2}$

مساحة متوازي الأضلاع هي : $S_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

و. مسافة نقطة عن مستقيم :

مسافة نقطة Ω عن مستقيم (D) مار من نقطة A و موجه بمتجهة $\vec{u}$ هي : $d\left(\Omega,(D)\right) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

ز. توازي و تعامد مستويين :

نعتبر مستويين $(P): ax + by + cz + d = 0$ و $(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$\vec{n}(a,b,c)$ و $\vec{n}'(a',b',c')$ هما متجهتان منظميتان للمستويان (P) و (P')

$(P)//(P')$ يكافئ $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$

$(P) \perp (P')$ يكافئ $\vec{n}.\vec{n}' = \vec{0}$

ك. تقاطع مستويين :

إذا كان (P) **و** (P') **متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم موجه بالمتجهة** $\vec{n} \wedge \vec{n}'$